

Елементи фінансової математики

1. Нарахування відсотків на капітал
2. Рахунок накопичення
3. Рахунок ренти
4. Погашення боргу

Нарахування відсотків на капітал

p – відсоткова ставка (%);

$i = \frac{p}{100}$ – питома відсоткова сума;

A – початкова величина вкладу (сума коштів вкладена під p % річних);

A_n – нарощена сума вкладу

► Простий річний відсоток :

кожного року прибуток зростає на однакову

величину $d = A \cdot i = A \cdot \frac{p}{100}$

$A+d,$ $A+2d,$ $A+3d,$... - арифметична прогресія

I рік II рік III рік

Через n років $A_n = A + nd = A\left(1 + n\frac{p}{100}\right)$

Наприклад, якщо вкладено 5000 гривень під простий річний відсоток 10%, тоді через 5 років вкладник матиме:

$$a_5 = 5000\left(1 + \frac{5 \cdot 10}{100}\right) = 5000\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 5000 + 2500 = 7500 \text{ гривень.}$$

► **Складний річний відсоток :**

Якщо відсоток початкового числа додається до цього числа, а далі нараховується на отриману суму

I рік $A_1 = A + iA = A \cdot (1+i)$

II рік $A_2 = A_1 + iA_1 = A_1(1 + i) = A(1 + i)^2$

n рік $A_n = A(1 + i)^n$

- геометрична прогресія

Приклад. Якщо вкладено 5000 грн під складний річний відсоток 10% , через 5 років вкладник матиме:

$$A_5 = 5000(1 + 0,1)^5 = 8052,55 \text{ грн}$$


► **Неперервне нарахування відсотків**

Якщо відсотки нараховуються рівномірно m разів протягом року за нормою $\frac{i}{m}$ на новий залишок вкладу, нарощена сума обчислюється за формулою:

$$A_n = A \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}$$

Якщо m спрямувати до ∞ , то отримаємо формулу неперервного нарахування відсотків:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_n = \lim_{m \rightarrow \infty} A \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} = Ae^{in}$$



Задача 2. Вкладник надає банку 2000 гривень під складні відсотки з умовою їх неперервного зростання на 12% річних. Обчислити нагромадження капіталу за 4 роки.

Розв'язування. Використаємо формулу неперервного зростання за складними відсотками:

$$K_4 = 2000 \cdot e^{4 \cdot 0,12} \approx 3,2322 \text{ тис. грн.}$$

► Рахунок накопичення

■ **Приклад 1.** Кожного місяця робітник вносить 100 гривень на свій рахунок накопичення з одержанням прибутку величиною $\frac{1}{2}\%$ за кожен місяць. Обчислити величину його накопичень:

а) безпосередньо після здійснення 25 внеску;

а) Кожен внесок за місяць зростає в 1,005 рази (0,5% за місяць). Тому перший внесок за 24 місяця перебування рахунку прийме значення $100 \cdot (1,005)^{24}$. Другий внесок знаходився на рахунку 23 місяця, тому він прийме значення $100 \cdot (1,005)^{23}$ третій внесок стане $100 \cdot (1,005)^{22}$, і т.д. Отже, загальна сума накопиченого рахунку робітника прийме значення

$$S = 100 \cdot (1,005)^{24} + 100 \cdot (1,005)^{23} + \dots + 100 \cdot (1,005) + 100.$$

Якщо записати праву частину в оберненому порядку, тоді її можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом $b_1 = 100$ і знаменником $q = 1,005$. Тому, використовуючи формулу суми скінченної геометричної прогресії, одержимо

$$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{100[(1,005)^{25} - 1]}{1,005 - 1} = \frac{100}{0,005}[(1,005)^{25} - 1] =$$
$$= 20000[1,13280 - 1] = 2655,91.$$

Таким чином, після 24 місяців робітник буде мати на своєму рахунку накопичення 2 655,9 гривень.

Величина накопичених коштів на рахунку безпосередньо після здійснення n внеску

$$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{P[(1+i)^n - 1]}{(1+i) - 1} = \frac{P}{i}[(1+i)^n - 1] = P \cdot s_{n/i}$$

► Рахунок ренти

Регулярно протягом певного терміну (n) одержуємо раніше обумовлену величину коштів (P) з рахунку в банку чи страховій компанії. Скільки коштів (A) потрібно покласти на рахунок ренти для виконання відповідних умов?

$$\text{I виплата: } A_1(1+i) = P \quad A_1 = \frac{P}{1+i}$$

$$\text{II виплата: } A_2(1+i)^2 = P \quad A_2 = \frac{P}{(1+i)^2}$$

$$\text{n виплата: } A_n(1+i)^n = P \quad A_n = \frac{P}{(1+i)^n}$$

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + \dots + A_n = P(1+i)^{-1} + P(1+i)^{-2} + \dots + P(1+i)^{-n} \\ &= \frac{P(1+i)^{-1} [1 - (1+i)^{-n}]}{1 - (1+i)^{-1}} = \frac{P}{i} [1 - (1+i)^{-n}] = Pa_{\overline{n}|i} \end{aligned}$$

Задача 5. В день 55-річчя працівниця фірми “Остер” відкрила рахунок ренти в страховій компанії “УНІВЕРСАЛЬНА” за умови щорічного отримання у свій день народження 1000 грн. протягом 15 років. Яку суму внесено на рахунок ренти, якщо кошти прийнято з 5% щорічним зростанням?

Розв’язування. Використаємо формулу $A = P \cdot a_{n/i}$. В нашій задачі регулярні виплати $P = 1000$ грн. Коефіцієнт $a_{n/i}$ взято із таблиці Д1 і рівний $a_{15/0,05} = 10,379658$. Значить $A = 1000 \cdot 10,379658 \approx 10379,66$ грн.

Отже, працівниця фірми повинна покласти на рахунок ренти 10379,66 грн., щоб одержувати по 1000 грн. щорічно протягом 15 років.

- **Погашення боргу** (процес повернення боргу регулярно, певними частинами, в певний термін і протягом обумовленого часу із виплатою певного відсотка)
- Якою повинна бути щоразова сплата боргу з використанням відсотку його зростання?

З математичної точки зору задача про погашення боргу аналогічна до задачі про ренту. Дійсно, задачу про ренту можна розглядати як задачу погашення боргу страховою компанією, яка взяла внесок A в борг на певних умовах і повертає його регулярно величиною P .

$$A = P \cdot a_{\bar{n}/i} \Rightarrow P = \frac{A}{a_{\bar{n}/i}}.$$

■ **Приклад 4.** На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг 8 000 доларів. Цю позику йому надано із 8% щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету на протязі 5 років. Скільки коштів повинен повернути студент кожного року після закінчення університету?

↳ *Розв'язання.* У даному випадку борг $A = 8\,000$ доларів, час його повернення $n = 5$, відсоток зростання $R = 8$, $i = \frac{R}{100} = 0,08$. Шукану величину P щорічної сплати боргу студентом знайдемо за формулою (7):

$$P = \frac{8000}{a_{5/0,08}} = \frac{8000}{3,99271} = 2003,65.$$



Джерела:

- ▶ Вища математика для економістів : навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – [5-те вид.]. – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
- ▶ Вища математика у прикладах і задачах для економістів [Електронний ресурс] : навч. посібник / А. М. Алілуйко, Н. В. Дзюбановська, О. Ф. Лесик [та ін.]. – Тернопіль : ТНЕУ, 2017. – 148 с.